≪ 연구논문 ≫ Sae Mulli(The Korean Physical Society) Volume 39, Number 6, 1999년 12월. pp. 1∼5

N 종류의 입자를 갖는 BAW 모형의 보편 부류

권성철 · 이지수* · 박형규
인하대학교 물리학과, 인천 402-751
*고려대학교 신경망동역학연구단, 서울 136-701

(1999년 12월 11일 받음)

일 차원 살창 상에서 입자의 종류가 N인 Branching annihilating random walks(BAW)모형의 보편 부류에 관해 연구하였다. 이 모형에서 임의로 선택된 입자는 p의 확률로 최 인접 살창 위치로 이동한다. 선택된 최 인접 살창 위치에 같은 종류의 입자가 있는 경우 두 입자는 살창에서 제거되며 다른 종류의 입자가 있는 경우에는 이동하지 못한다. 선택된 입자는 $r(1-p)$ 의 확률로 자신과 다른 종류의 입자를 두 개의 최 인접 살창 위치에 각각 생성시키며 $(1-r)(1-p)$의 확률로 자신과 같은 종류의 두 입자를 생성시킨다. 이 모형은 서로 다른 종류의 입자들 사이에 딱딱핵 상호 작용(hardcore interaction)을 포함한다. $N > 1$인 경우, 유한한 이동 확률($p < 1$)에서 흡수 상전이는 없으며 $p = 1$인 없앰 고정점(annihilation fixed point)만이 존재한다. $N = 2, 3$인 경우, 정적 몬테칼로 시늉내기를 통해 $p = 1$ 근처에서 공간 상관 길이 및 특성 시간과 질서 맺음 변수의 임계지수 값으로 각각 $\nu_\perp = 1.8(2)$, $\nu_{||} = 3.6(4)$, $\beta = 1.8(2)$을 얻었다. 이를 통해 딱딱핵 상호 작용이 새로운 보편 부류를 만들어냄을 확인하였다.

일 차원 살창에서 m개의 단일 종류의 입자만을 생성하는 branching annihilating random walks(BAW(m)) 모형의 보편 부류(universality class)는 생성되는 입자의 수 m에 따라서 1차원 안비김 흡수 상전이(nonequilibrium absorbing phase transitions) 현상에서 알려져 있는 directed percolation(DP) 부류와 directed Ising(DI) 부류로 분류된다 [1–3]. 이 모형은 생성되는 입자의 수가 짝수인 경우 DI 보편 부류에 속하며 홀수인 경우는 DP 보편 부류에 속한다. BAW(m)모형은 임의로 선택된 입자가 p의 확률로 최 인접 살창 위치로 이동하며 $1-p$의 확률로 m개의 입자를 m 개의 최 인접 살창 위치에 각각 생성시키는 모형이다. 선택된 입자가 선택된 최 인접 살창 위치로 이동 할 때 그 위치에 다른 입자가 있는 경우 두 입자는 살창에서 제거된다. 이 모형은 이동 확률 p를 증가시킴에 따라 임계 확률 p_c 에서 정상 상태(steady state)의 입자의 밀도(ρ_∞)가 유한한 활성 상태(active state)에서 모든 입자가 사라진 흡수 상태(absorbing state)로의 연속적인 흡수 상전이를 보인다. p_c 근방의 임계 영역(critical region)에서 입자 밀도(ρ_∞), 공간 상관 길이($\xi_\perp$) 및 특성 시간(τ)은 임계점과의 거리 $(p_c - p)$ 의 멱으로 $\rho_\infty \sim (p_c - p)^\beta$, $\xi_\perp \sim |p_c - p|^{-\nu_\perp}$ 및 $\tau \sim |p_c - p|^{-\nu_{||}}$ 로 주어진다 [4]. 위의 임계지수들은 흡수 상전이의 임계성(criticality)을 특정 짓는다. 본 논문에서는 일반적으로 N 종류의 입자를 생성하는 BAW(m)모형 중에서 $N = 2$ 와 3 및 $m = 2$ 인 모형($\mathrm{BAW_H}(2)$)의 보편 부류에 관해 연구하였다. 이 모형에서 임의로 선택된 입자는 p의 확률로 최 인접 살창 위치로 이동한다. 최 인접 살창 위치에 같은 종류의 입자가 있는 경우 두 입자는 살창에서 제거되며 다른 종류의 입자가 있는 경우에는 이동하지 못한다. 선택된 입자는 $(1-r)(1-p)$의 확률로 자신과 동일한 종류의 두 개의 입자를 선택된 방향의 두 최 인접 살창 위치에 각각 생성시킨다(dynamic branching [2]). $r(1-p)$의 확률로 자신과 다른 $N-1$개의 종류 중에서 임의로 선택된 한 종류의 두 입자를 선택된 방향의 최 인접 살창 위치에 생성시킨다. 이 모형은 서로 다른 종류의 입자들 사이에 딱딱핵 상호 작용(hardcore interaction)을 포함한다.

다른 종류의 입자들 사이에 딱딱핵 상호 작용을 무시한 경우, 이 모형($\mathrm{BAW_B}(2)$)은 확률 r 이 유한할 때 흡수 상전이를 보이지 않으며 $p < 1$ 인 영역에서 계는 항상 활성 상태에 있다고 알려져 있다 [3]. $p = 1$에서 입자들의 소멸 과정만 존재하므로 정상 상태는 흡수 상태 뿐이며 따라서 $p = 1$이 임계점이 된다. 임계점 근처에서 질서 맺음 변수, 공간 및 특성 시간의 임계지수들을 얻을 수 있으며 $r > 1$인 모든 경우에 $\beta = 1$, $\nu_\perp = 1$과 $\nu_{||} = 2$로서 DP 및 DI 보편 부류와는 다른 보편 부류에 속하는 것으로 알려져 있다.

$N = 2$이고, 다른 종류의 입자들 사이에 딱딱핵 상호 작용이 있는 $\mathrm{BAW_H}(2)$ 모형에 대해 동적 및 정적 몬테칼로 시늉내기를 통해서 임계점과 동적 및 정적 임계지수들을 측정하였다. 동역학적 양으로서 계가 시간 t에서 아직 흡수 상태에 도달하지 않을 확률 $P(t)$, 평균 총 입자수 $N(t)$ 및 입자들이 퍼져나간 거리의 평균 제곱 $R^2(t)$는 임계점에서 $P(t) \sim t^{-\delta}$, $N(t) \sim t^\eta$ 그리고 $R^2(t) \sim t^z$로 주어진다 [5]. $t \to \infty$ 극한에서 위의 양들의 동적 지수(dynamic exponent)를 측정하기 위해, δ의 유효지수를 $\delta(t) = \ln[P(t)/P(t/b)]/\ln b$과 같이 정의하고 η와 z의 유효지수도 같은 방식으로 정의한다. 이들 유효지수는 활성 상태 및 흡수 상태에서는 각각 양의 곡률 및 음의 곡률을 보인다. 초기 조건으로 진공 상태에 같은 종류의 두 입자만이 있는 배위를 선택하였고 b는 5로 하였다. $p = 0.992$, 0.995 및 0.999에서 10^6개의 표본을 갖고 10^4 몬테칼로 시간 단위까지 임계지수들을 측정하였다. 그림 1에서 이 유효지수들이 모두 양의 곡률을 보이며, 따라서 $p < 1$인 영역에서 이 모형은 흡수 상전이를 보이지 않는다.

$p = 1$의 임계성을 결정하기 위해 정적 몬테칼로 시늉내기를 하였다. 유한 크기 눈금잡기 이론(finite-size scaling theory) [4]에 따르면 계의 크기(L)가 유한할 때 정상 상태의 입자의 밀도(ρ_∞) 및 계가 정상 상태에 도달하는 특성 시간(τ)은 임계점에서 $\rho_\infty \sim L^{-\beta/\nu_\perp}$와 $\tau \sim L^{\nu_{||}/\nu_\perp}$로 주어지며, $L \to \infty$인 열역학적 극한에서 $\rho(t)$는 $t^{-\beta/\nu_{||}}$로 감소한다. $p = 1$에서 계의 크기 L을 32에서 1024까지 증가시키며 ρ_∞을 측정하였다. 독립적인 표본은 $L = 32$인 경우 10^4개, $L = 1024$인 경우 10^3개를 사용하였다. 그림 2는 $p = 1$에서 ρ_∞, τ와 $\rho(t)$을 L과 t에 대해 이중 로그로 그린 것이다. 각 양들의 기울기로부터 $\beta/\nu_\perp = 0.995(5)$, $\nu_{||}/\nu_\perp = 2.00(1)$과 $\beta/\nu_{||} = 0.497(5)$를 얻었다. 이 값들은 $\mathrm{BAW_B}(2)$ 모형의 지수 값들과 잘 일치하고 있으며, 이는 $p = 1$이 없앰 고정점이기 때문이다. ρ_∞는 L과 $p_c - p$만의 함수이며, $\rho_\infty(L, p_c - p) = L^{-\beta/\nu_{||}} F((p_c - p)L^{1/\nu_\perp})$와 같은 축척을 따른다고 가정하자. ρ_∞는 임계점 및 임계점으로 가는 극한에서 각각 $\rho_\infty \sim L^{-\beta/\nu_\perp}$와 $\rho_\infty \sim (p_c - p)^\beta$로 주어진다. 따라서 눈금잡기 함수 $F(x)$는 x가 무한대로 가는 극한에서 x^β이며, x가 0으로 가는 극한에서는 상수가 되어야 한다. $F(x)$의 성질로부터 ρ_∞를 $x = (p_c - p)L^{1/\nu_\perp}$에 대해 scaling plot을 함으로써 $\nu_\perp$와 β를 얻을 수 있다. 그림 3의 scaling plot을 통해 $\nu_\perp = 1.8(2)$를 얻었으며 β는 $F(x)$가 x^β로 느리게 수렴하여 측정할 수 없었다. 정적 지수 비 $\beta/\nu_\perp = 1$과 $\beta/\nu_{||} = 1/2$을 이용하여 $\beta = 1.8(2)$과 $\nu_{||} = 3.6(4)$를 얻었다. $N = 3$인 경우에 대해서도 동적 및 정적 몬테칼로 시늉내기를 하였다. $p < 1$에서 흡수 상전이는 없었으며, 정적 임계지수들의 비와 각 지수들의 값은 $N = 2$인 경우와 비슷한 값을 얻었다.

임계 영역에서 입자의 밀도가 매우 낮으므로 입자들 사

이의 상관 관계는 무시할 수 있으며, 또한 생성 확률이 매우 낮기 때문에 한 번의 생성 과정을 통해 형성된 세 입자의 배위가 계의 임계성을 결정할 것이다. $N > 1$인 경우, $A_i \to 3A_i$ 과정에 의해 형성된 3개의 같은 입자들을 충분히 긴 시간이 지난 후에 발견할 확률 P_{3s}와 $A_i \to A_i + 2A_j (i \neq j)$ 과정에 의해 형성된 3입자들을 발견할 확률 P_{2s}의 비, 즉 P_{3s}/P_{2s}는 0으로 수렴한다. 이것은 $p = 1$ 근처에서는 주로 이동 과정에 의한 소멸 과정이 일어나기 때문이다. 따라서 계의 임계성은 $A_i + 2A_j \to A_i (i \neq j)$ 소멸 과정에 의해 결정된다. $r \neq 0$인 모든 경우에, 위의 소멸 과정은 항상 존재하며, 따라서 $N > 1$인 모형들의 임계성이 모두 같아야 함을 의미한다. 딱딱핵 상호작용이 없는 경우 위의 소멸과정은 막걷기(random walk)의 first passage problem이다. 즉 입자 A_i 에 의해 생성된 두 입자($2A_j$)의 생존 확률 $P_{2s}(t)$는 막걷기의 성질에 따라 $P_{2s}(t) \sim t^{-1/2}$로 주어진다. 총 입자수의 Langevin 식 [3]으로 부터 일반적으로 생존 확률 $P_{2s}(t)$가 $P_{2s}(t) \sim t^{-\theta}$임을 가정하여 θ와 $\nu_\perp$ 사이의 관계가 $\nu_\perp = 1/[2(1-\theta)]$임을 유도할 수 있다. $\theta = 1/2$인 경우 $\nu_\perp = 1$로 주어진다. 그러나 서로 다른 종류의 입자들 사이에 딱딱핵 상호 작용이 있는 경우는, 입자 A_i가 반사 경계면의 역할을 하게 되어 입자 A_j가 확산할 수 있는 공간을 제한한다. 이 효과는 두 A_j 입자의 생존 확률을 더욱 작게 만들며, S. Redner와 P. L. Krapivsky 가 이용한 방법 [6]을 사용하여 $P_{2s}(t)$ 는 $t^{-3/4}$으로 감소 하는 것을 보일 수 있다. 따라서 $\nu_\perp$은 2가 되며, 다른 입자사이의 딱딱핵 상호 작용이 $\mathrm{BAW_H}(2)$ 모형을 $\mathrm{BAW_B}(2)$ 모형과는 다른 보편부류에 속하게 한다.

감사의 글

본 연구는 21세기 한국연구재단의 학술연구비 지원에 의하여 수행되었다.

참 고 문 헌

[1] I. Jensen, Phys. Rev. **E47**, R1 (1993); Phys. Rev. **E50**, 3623 (1994); H. Takayasu and A. Yu. Tretyakov, Phys. Rev. Lett. **68**, 3060 (1992).
[2] S. Kwon and H. Park, Phys. Rev. **E52**, 5955 (1995).
[3] J. Cardy and Uwe C. Täuber, Phys. Rev. Lett. **77**, 4780 (1996); J. Stat. Phys. **90**, 1 (1998).
[4] T. Aukrust, D. A. Browne and I. Webman, Phys. Rev. **A41**, 5294 (1990).
[5] P. Grassberger and A. de la Torre, Ann. Phys.(NY) **122**, 373 (1979).
[6] S. Redner and P. L. Krapivsky, cond-mat/9905299.

그림 1. 유효지수 $\delta(t)$, $\eta(t)$ 및 $z(t)$의 곡선. 각 그림 상자에서 각 곡선은 위에서 아래로 $p = 0.992, 0.995, 0.999$에 해당한다.

그림 2. $p = 1$에서 ρ_∞, τ 및 $\rho(t)$의 L 과 t 에 대한 이중 로그 그림. 각 양들의 기울기로부터 $\beta/\nu_\perp = 0.995(5)$, $\nu_\perp/\nu_{||} = 2.00(1)$ 및 $\beta/\nu_{||} = 0.497(5)$을 얻었다.

그림 3. $p = 1$ 근처 임계 영역에서의 $\rho(L,\Delta)L^{\beta/\nu_{||}}$의 $x = \Delta L^{1/\nu_\perp}$에 대한 scaling plot.

Universality Classes of BAW Model with N Species Particles

Sungchul Kwon, Jysoo Lee* and Hyunggyu Park
Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751
* *Center for Neurodynamics, Korea University, Seoul 136-701*

(Received 11 December 1999)

We study the universality class of branching annihilating random walks with N species particles ($\mathrm{BAW_N}$) in one dimension. In this model, a selected particle hops to the nearest neighbor site with probabilty p. If this site is already occupied by another particle of the same species, the two particles annihilate immediately; otherwise, the hopping attempt is rejected. A selected particle can create two identical particles of the same species with probability $(1-r)(1-p)$ and of a different species with probability $r(1-p)$ on two nearest neighbor sites. This model involves the hardcore interaction between different species particles. For $N > 1$, the system is always in an active state for any $p < 1$, and $p = 1$ is an annihilation fixed point. For $N = 2$ and 3, we find static exponents $\nu_\perp = 1.8(2)$, $\nu_{||} = 3.6(4)$, and $\beta = 1.8(2)$ through static Monte Carlo simulations. Thus, we conclude that the hardcore interaction between different species particles plays a crucial role in determining the universality classes of the $\mathrm{BAW_N}$ model.