≪ 연구논문 ≫ Sae Mulli(The Korean Physical Society) Volume 39, Number 6, 1999년 12월. pp. 1∼5

무한히 많은 흡수 상태를 가지고 상호 작용하는 단자-단자 모형

박흥식 · 박형규
인하대학교 물리학과, 인천 402-751

(1999년 12월 11일 받음)

일 차원 살창 상에서 상호 작용하는 단자-단자(IMM)모형을 일반화하여 무한히 많은 흡수상태를 갖는 모형의 보편 부류에 관해 연구했다. p의 확률로 A단자가 선택되고 $(1-p)$의 확률로 B단자가 선택된다. 임의로 선택된 빈 자리의 최 인접 자리가 둘 다 비어있는 경우, A단자는 단위 확률로 흡착되고, B단자는 r_B의 확률로 흡착이 허용되지 않는다. 임의로 선택된 빈 자리의 최 인접 자리 중 한 자리가 다른 종류의 단자로 차있는 경우, 이 빈 자리에 흡착을 시도한 단자와 반응하여 살창에서 제거된다($A+B \to \emptyset$). 임의로 선택된 빈 자리의 최 인접 자리 중 한 자리가 같은 종류의 단자로 차 있는 경우 와 최 인접 자리가 모두 단자로 차있는 경우, 어느 단자도 흡착하지 못한다. 우리는 동적 몬테칼로 시늉내기를 통해 이 모형의 보편 부류가 directed Ising(DI) 보편 부류에 속함을 확인하였다. 우리는 대칭성 제거 마당을 도입하여 흡수 상태들 사이의 대칭성을 제거함으로써, 보편 부류가 DI 보편 부류에서 directed percolation(DP) 보편 부류로 변화됨을 몬테칼로 시늉내기를 통해 확인하였다.

단자-단자(MM)모형 [1]의 규칙은 임의로 선택된 빈 자리에 단자가 흡착되고, 그 자리의 최 인접 자리 중 한 자리가 다른 종류의 단자로 차있는 경우, 이 단자는 흡착을 시도한 단자와 반응하여 살창에서 제거된다. MM모형은 A단자로 포화된 상태와 B단자로 포화된 상태 사이에서 1차 상전이를 보인다.

상호 작용하는 단자-단자 모형(IMM) [2,3]은 MM모형을 일반화시켜 임의로 선택된 빈 자리의 최 인접 자리 중 한 자리가 같은 종류의 단자로 차있는 경우 q의 확률로 흡착을 허용한 모형이다. $q = 1$인 경우가 상호 작용이 없는 MM모형이다. q가 작은 경우 A 꽉참 흡수상태 또는 B 꽉참 흡수 상태에서 빈 자리의 밀도가 유한한 활성 상태로의 2차 상전이가 있다. 우리는 IMM모형을 보다 일반화시켜 임의로 선택된 빈 자리의 최 인접 자리가 모두 단자로 차 있는 경우와 두 최 인접 자리 중 한 자리가 같은 종류의 단자로 차있는 경우 흡착을 허용하지 않았다. 빈 자리의 최 인접 자리가 모두 비어있는 경우 A단자는 p의 확률로 빈 자리에 흡착하고 B단자는 $(1-p)(1-r_B)$확률로 빈 자리에 흡착한다. 최 인접 자리 중 한 자리가 다른 종류의 단자로 차있는 경우에는, A단자는 p의 확률로 흡착을 시도하고 B단자는 $(1-p)$의 확률로 흡착을 시도한 후 이미 흡착되어 있는 다른 단자와 반응하여 살창에서 제거된다($A + B \to \emptyset$). 이 모형의 흡수 상태는 단자와 빈 자리가 교대로 있는 상태이며, 따라서 무한히 많은 흡수 상태를 얻는다. 그 수는 계의 크기(L)가 증가함에 따라 지수적으로 증가한다. 무한히 많은 흡수 상태(infinitely many absorbing states)를 갖는 IMM(IMA-IMM)모형의 흡수 상태는 빈 자리가 살창의 홀수 번째에 있는 부류와 짝수 번째에 있는 부류로 나누어진다. 흡수 상태에서 활성 상태로 흡수 상전이(absorbing phase transition)를 보이는 모형의 보편 부류를 결정하는 중요한 요소는 흡수 상태 사이의 대칭성이라는 사실이 알려져있다 [4,5]. 흡수 상태가 하나인 모형의 경우는 DP 보편 부류에 속하며, 흡수 상태가 대칭적인 두개의 상태로 축퇴되어 있는 모형의 경우는 DI 보편 부류에 속하는 것으로 알려져 있다. 무한히 많은 흡수 상태를 갖는 모형들의 보편 부류도 흡수 상태들의 대칭성에 따라 DP 및 DI 보편 부류로 구분된다 [6].

IMA-IMM모형의 경우 두 부류간에 대칭성이 있으므로 DI 보편 부류에 속함을 몬테칼로 시늉내기를 통해 확인하였다. 두 부류간에 대칭성이 제거된 경우 DP 보편 부류로 바뀜을 몬테칼로 시늉내기를 통해 확인하였다. $r_B = 0$인 경우, A단자와 B단자 모두 흡수 영역을 만드는 역할을 너무 강하게 하기 때문에 상전이가 일어나지 않는다. $r_B \neq 0$인 경우, B단자가 그대로 흡착되는 경우에 비해, A단자와 만나 반응이 일어날 때는 r_B에 의한 제약을 받지 않으므로 활성 영역을 만드는 역할이 보다 커지게 된다. 확률 p가 작은 경우, B단자가 많이 흡착이 되어서 흡수 상태를 만들고, 확률 p가 큰 경우 A단자가 많이 흡착하여 흡수 상태를 만들게 되므로 이 모형은 두 번 흡수 상전이가 일어난다.

무한히 많은 흡수 상태를 가지는 모형에서는, 초기 조건이 계가 만들어내는 자연스런 흡수 상태 근처인 경우에만, 동적지수(dynamic exponent)가 알려진 보편 부류 값과 같은 값을 주는 것으로 알려져 있다 [7]. 임계점에서 유한한 살창계가 흡수 상태에 들어갔을 때 A 단자의 밀도를 측정하여 자연스런 밀도(natural density)ρ_A를 결정한다. 그 밀도를 가지는 초기 조건을 사용하여 동적지수를 측정한다. 살창 위치가 짝수인 부살창과 홀수인 부살창으로 나눈후 살창 위치가 홀수인 부살창은 $2\rho_A$의 확률로 A 단자를 흡착시키고, $(1-2\rho_A)$의 확률로 B 단자를 흡착시킨다. 살창 위치가 짝수인 부살창은 모두 빈 자리로 채운 후, 5개의 빈 자리를 살창 중앙에 만든다. 표본의 수는 $L = 32$인 경우 10^5에서 $L = 1024$인 경우 10^3까지 사용하였다. 첫 번째 임계점 $p_c = 0.100(2)$에서 자연스런 밀도 $\rho_A = 0.100(1)$를 얻었으며, 두 번째 임계점 $p_c = 0.5058(6)$에서 $\rho_A = 0.459(15)$를 얻었다. 이를 이용한 동적 몬테칼로 시늉내기를 통해서 임계점과 동적 임계지수들을 측정하였다. 동역학적 양으로서 계가 시간 t에서 아직 흡수 상태에 도달하지 않을 확률 $P(t)$, 평균 총 입자수 $N(t)$ 및 입자들이 퍼져나간 거리의 평균 제곱 $R^2(t)$ 는 임계점에서 $P(t) \sim t^{-\delta}$, $N(t) \sim t^{\eta}$ 그리고 $R^2(t) \sim t^{z}$ 로 주어진다 [9]. $P(t), N(t), R^2(t)$의 시간에 대한 이중 로그 그림을 임계점에서 그리면 직선을 보이며 임계점에서 벗어나면 곡률을 가지면서 위 또는 아래 쪽으로 휘어지게 된다. 이 곡선들의 국소 기울기를 조사함으로써 동적지수를 좀더 정확히 결정할 수 있다. δ의 유효지수(effective exponent)를 $\delta(t) = \ln[P(t)/P(t/b)]/\ln b$와 같이 정의하고, $\eta(t)$와 $z(t)$의 유효지수도 같은 방식으로 정의한다. 그림 1은 $r = 0.9$인 경우, 두 번째 임계점 $p_c = 0.5058$근처에서 $1/t$에 대해 유효 지수를 그린 것이다($b = 5$). 첫 번째 상전이는 임계점 $p_c = 0.100(2)$에서 일어난다. 2×10^5개의 표본을 이용하여 5000 몬테칼로 단위까지 동적지수들을 측정하였으며, 각 지수들의 값으로 $\delta = 0.292(4)$, $\eta = -0.005(7)$, $z = 1.130(5)$를 얻었다. 두 번째 상전이는 임계점 $p_c = 0.5058(6)$에서 일어난다. 3×10^5개의 표본을 이용하여 5000 몬테칼로 단위까지 동적지수들을 측정하였으며, 각 지수들의 값으로 $\delta = 0.293(3)$, $\eta = -0.005(5)$, $z = 1.149(5)$를 얻었다[그림 1]. 위의 지수 값들은 DI 보편 부류의 동적지수 값들 $\delta = 0.285(2)$, $\eta = 0.000(1)$, $z = 1.141(2)$ [8]과 잘 일치하고 있다. 이 결과는 무한히 많은 흡수 상을 갖는 모형에서도 흡수 상태간에 대칭성이 있는경우 DI 보편 부류에 속한다는 것을 뒷받침 해준다.

유한 크기 눈금잡기 이론(finite-size scaling theory)

[10]에 따르면 계의 크기(L)가 유한할 때 정상 상태의 입자 밀도(ρ_∞) 및 계가 정상 상태에 도달하는 특성시간(τ)은 임계점에서 $\rho_\infty \sim L^{-\beta/\nu_\perp}$ 와 $\tau \sim L^{\nu_\parallel/\nu_\perp}$ 로 주어지며, $L \to \infty$ 인 극한에서 $\rho(t)$ 는 $t^{-\beta/\nu_\parallel}$ 로 감소한다. 동적 몬테칼로 시늉내기에서 측정한 임계점에서 표본 평균을 취한 kink 밀도($\overline{\rho}(t)$)를 계의 크기 $L = 32$에서 $L = 1024$로 증가시키면서 시간의 함수로 측정하여 정상 상태의 kink 밀도($\overline{\rho}_s$) 와 특성 시간(τ)을 측정하였다. 표본의 수는 $L = 32$ 인 경우 10^5 에서 $L = 1024$ 인 경우 2×10^3 까지 사용하였다. 그림 2는 첫 번째 임계점 $p_c = 0.100$ 에서 $\rho(t)$, ρ_∞와 τ를 L 과 t 에 대해 이중 로그로 그린 것이다. 각 양들의 기울기로 부터 $\beta/\nu_\parallel = 0.282(1)$, $\beta/\nu_\perp = 0.491(12)$, $\nu_\parallel/\nu_\perp = 1.75(5)$를 얻었다[그림 2]. 두 번째 임계점 $p_c = 0.5058$에서는 $\beta/\nu_\parallel = 0.288(1)$, $\beta/\nu_\perp = 0.505(3)$, $\nu_\parallel/\nu_\perp = 1.75(3)$를 얻었다. 위의 지수 값들은 DI 보편 부류의 정적 지수비 값들 $\beta/\nu_\parallel = 0.285(2)$, $\beta/\nu_\perp = 0.500(5)$, $\nu_\parallel/\nu_\perp = 1.750(5)$ [8]과 잘 일치하고있다.

IMA-IMM모형의 흡수 상태는 빈 자리가 홀수인 부류와 짝수인 부류로 나뉘어진다. 이러한 두 흡수 상태 사이의 대칭성은 단자의 흡착을 빈 자리가 짝수인 경우 확률 h로 금지시킴으로써 제거할 수 있다. $h = 0.5$에 대해서 동적 몬테칼로 시늉내기를 하였다. 그림 3에는 $r = 0.9$인 경우, 두 번째 임계점 $p = 0.3254$ 근처에서 $1/t$에 대해 유효지수를 그린 것이다($b = 5$). 첫 번째 상전이는 $p_c = 0.1986(3)$에서 일어난다. 2×10^5개의 표본을 이용하여 5000 몬테칼로 단위까지 동적지수들을 측정하였으며, 각 지수들의 값으로 $\delta = 0.160(4)$, $\eta = 0.308(4)$, $z = 1.250(5)$을 얻었다. 두 번째 상전이는 임계점 $p_c = 0.3254(4)$에서 일어난다. 2×10^5개의 표본을 이용하여 3500 몬테칼로 단위까지 동적지수들을 측정하였으며, 각 지수들의 값으로 $\delta = 0.163(2)$, $\eta = 0.308(4)$, $z = 1.253(7)$을 얻었다[그림 3]. 위의 지수 값들은 DP 보편 부류의 동적지수 값들 $\delta = 0.1596(18)$, $\eta = 0.3137(10)$, $z = 1.2660(14)$ [8]과 잘 일치하고 있다.

우리는 무한히 많은 흡수 상을 갖는 모형에서도 두개의 흡수 상태 부류간에 대칭성이 있는 경우 DI 보편 부류에 속한다는것을 확인하였다. 대칭성 제거 마당을 도입하여 두 흡수 상태 부류간의 대칭성을 제거함으로써, 보편 부류가 DI 보편 부류에서 DP 보편 부류로 변화됨을 몬테칼로 시늉내기를 통해 확인하였다. 따라서 무한히 많은 흡수 상태를 갖는 모형에서도 보편 부류를 결정짓는 중요한 인자가 모형이 가지는 흡수 상태 사이의 대칭성이라는 것을 보였다.

감사의 글

본 연구는 1999년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었다.

참 고 문 헌

[1] D. ben-Avraham, D. Considine, P. Meakin and S. Redner, J. Phys. A: Math. Gen **23**, 4297 (1990).

[2] J. Zhuo, S. Redner and H. Park, J. Phys. A: Math. Gen **26**, 4197 (1993).

[3] H. Park, J. Köhler, I-M Kim, D. ben-Avraham and S. Redner, J. Phys. A: Math. Gen **26**, 2071 (1993).

[4] H. Park and H. Park, Physica **A221**, 97 (1995); M. H. Kim and H. Park, Phys. Rev. Lett. **73**, 2579 (1994).

[5] W. Hwang, S. Kwon, H. Park and H. Park, Phys. Rev. **E57**, 6438 (1998).

[6] W. Hwang and H. Park, Phys. Rev. **E59**, 4683 (1999).

[7] I. Jensen and R. Dickman, Phys. Rev. **A48**, 1710 (1993).

[8] I. Jensen, Phys. Rev. **E50**, 3623 (1994).

[9] P. Grassberger and A. de la Torre, Ann. Phys. (NY) **122**, 373 (1979).

[10] T. Aukrust, D. A. Browne and I. Webman, Phys. Rev. **A41**, 5294 (1990).

그림 1. 유효지수 $\delta(t)$, $\eta(t)$ 및 $z(t)$의 곡선. 각 그림 상자에서 각 곡선은 위에서 아래로 $p = 0.5046, 0.5058, 0.5070$에 해당한다.

그림 2. $p = 0.1$에서 $\rho(t)$, ρ_∞ 및 τ의 L과 t에 대한 이중 로그 그림. 각 양들의 기울기로부터 $\beta/\nu_\parallel = 0.282(1)$, $\beta/\nu_\perp = 0.491(12)$ 및 $\nu_\perp/\nu_\parallel = 1.75(5)$을 얻었다.

그림 3. 유효지수 $\delta(t)$, $\eta(t)$ 및 $z(t)$의 곡선. 각 그림 상자에서 각 곡선은 위에서 아래로 $p = 0.3246, 0.3254, 0.3262$에 해당한다. $h = 0.5$인 경우이다.

Interacting Monomer-Monomer Model with Infinitely Many Absorbing States

Heungsik PARK and Hyunggyu PARK
Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751

(Receive 11 December 1999)

We study the interacting monomer-monomer (IMM) model with infinitely many absorbing (IMA) states. The IMM-IMA model is a monomer-monomer model with two different species of monomers, A and B. An A monomer is selected with probability p, and a B monomer with probability $1-p$. These monomers can adsorb at a randomly selected vacant site with no adjacent monomer-occupied sites with unit probability for A and $1-r_B$ for B respectively. A nearest neighbor AB pair reacts and desorbs immediately from the lattice. An adsorption attempt of a monomer is rejected when both adjacent sites to a selected vacant site are occupied or at least one adjacent site is occupied with a monomer of the same species. The absorbing states can be divided into two equivalent groups. We perform Monte Carlo simulations and show that this model belongs to the directed Ising (DI) universality class. When the symmetry between the two absorbing groups is broken, we confirm that its critical behavior belongs to the directed percolation (DP) class.